

Aufgabenliste für die Mittelstufe

I. Aufgabenstellungen

1 Gleichungen/Gleichungssysteme

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen

$$1.1 \quad (x - 2)(x - 5) = x^2 + 3$$

$$1.2 \quad \frac{1}{(x+1)x} - \frac{1}{(x-1)x} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$1.3 \quad 2x^2 + 12x + 18 = 50$$

$$1.4 \quad \begin{cases} 7x + 32y = 13 \\ 9x + 8y = 83 \end{cases}$$

$$1.5 \quad 2 \cdot 3^x = 1,4; \quad 7^{x+1} = 7^{2x}; \quad 2^x = 3^{x-1}$$

2 Graphen

2.1 Zeichne die Graphen zu den linearen Funktionen mit den Gleichungen

$$a) \quad y = \frac{1}{3}x + 2,5 \quad b) \quad y = \frac{5}{2}x - 1,5 \quad c) \quad y = -\frac{2}{3}x + 1,5 \quad d) \quad y = -3$$

2.2 Bestimme zu der durch

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\frac{1}{2}$$

gegebenen Parabel den Scheitelpunkt.

Diese Parabel wird um 5 Einheiten nach links und um 4 Einheiten nach unten verschoben. Wie lautet jetzt die Funktionsgleichung?

2.3 Bestimme die Lösungsmenge graphisch:

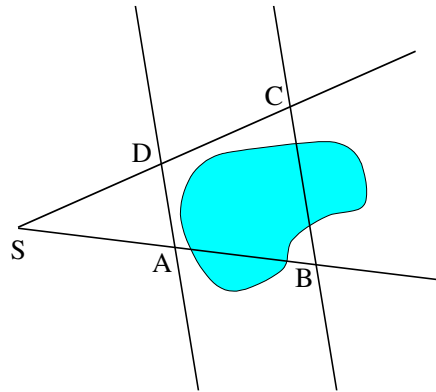
$$a) \quad \begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \quad b) \quad \begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x + 8 \end{cases}$$

3 Geometrie

- a) Ein Viereck besitzt die Eckpunkte A(0|0), B(6|2), C(3|5) und D(0|4). Zeichne das Viereck in ein Koordinatensystem und bestimme seinen Flächeninhalt.
Das Viereck dient als Grundfläche eines 7 LE hohen Prismas. Berechne das Volumen dieses Prismas.

Welchen Radius hat ein Zylinder, welcher die gleiche Höhe und dasselbe Volumen wie das Prisma besitzt?

- b) Bei einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis $c=8$ cm und ein Schenkel 5 cm lang. Berechne die Höhe h_c .
- c) Die Längen der Strecken AB und BC sollen bestimmt werden. Dazu werden die Längen der Strecken SD, DC, SA und AD gemessen: $SD=2,3$ km, $DC=1,7$ km, $SA=2,8$ km und $AD=1,5$ km. Die Geraden AD und BC sind parallel.
- 1) Berechne die Länge der Strecke AB.
 - 2) Berechne die Länge der Strecke BC.
 - 3) Wie kann man bei der Vermessung im Gelände überprüfen, ob die Geraden AD und BC parallel sind?
- d) Bestimme zu dem Dreieck aus Aufgabe 3b die Größe des Basiswinkels.



II. Lösungen

1. Gleichungen und Gleichungssysteme

Rechnung zu 1.1	Bemerkung
$(x-2)(x-5) = x^2+3$ $x^2-2x-5x+10 = x^2+3$ $x^2-7x+10 = x^2+3$ $-7x = -7$ $x = 1$ $L = \{1\}$	Produkt ausmultiplizieren gleichartige Glieder zusammenfassen auf beiden Seiten durch -7 teilen Lösungsmenge angeben

Rechnung zu 1.2	Bemerkung
$\frac{1}{(x+1)x} - \frac{1}{(x-1)x} = \frac{2}{x^2-1}$ $\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)(x+1)x} = \frac{2x}{(x^2-1)x}$ $(x-1)-(x+1) = 2x$ $x-1-x-1 = 2x$ $-2 = 2x$ $x = -1$ $L = \{-1\}$	<p>$D=Q\{-1;0;1\}$ Hauptnenner ist $(x+1)(x-1)x$ entsprechend erweitern auf beiden Seiten mit dem Hauptnenner multiplizieren</p> <p>Außerdem wird hier die dritte binomische Formel angewandt:</p> $(x+1)(x-1) = x^2-1$

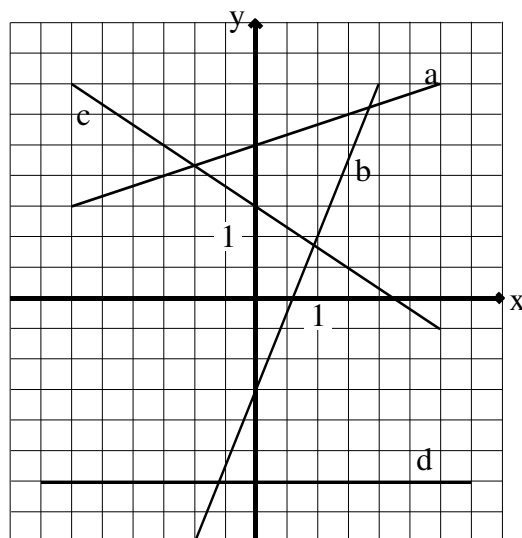
Rechnung zu 1.3	Bemerkung
$2x^2+12x+18 = 50$ $x^2+6x+9 = 25$ $x^2+6x-16 = 0$ $x_1 = -3+\sqrt{9+16}$ $= -3+\sqrt{25}$ $= 2$ $x_2 = -3-\sqrt{9+16}$ $= -8$ $L = \{-8;2\}$	<p>Gleichung auf Normalform bringen</p> <p>p-q-Formel lautet:</p> $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ <p>hier ist: $p=6$ und $q=-16$.</p>

Rechnung zu 1.4	Bemerkung
$\begin{cases} 7x + 32y = 13 \\ 9x + 8y = 83 \end{cases}$ $\begin{cases} 32y = 13 - 7x \\ 8y = 83 - 9x \end{cases}$ $\begin{cases} 32y = 13 - 7x \\ 32y = 332 - 36x \end{cases}$ $13 - 7x = 332 - 36x$ $29x = 319$ $x = 11$ $9 \cdot 11 + 8y = 83$ $y = -2$ $L = \{(11 -2)\}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Gleichung nach $32y$ auflösen 2. Gleichung nach $8y$ auflösen <p>bei 2. Gleichung auf beiden Seiten mit 4 multiplizieren</p> <p>Gleichsetzen</p> <p>$x=11$ in 2. Ausgangsgleichung einsetzen</p>

Rechnung zu 1.5	Bemerkung
$2 \cdot 3^x = 1,4$ $3^x = 0,7$ $\lg 3^x = \lg 0,7$ $x \cdot \lg 3 = \lg 0,7$ $x = \frac{\lg 0,7}{\lg 3}$ $x \doteq -0,32$ $L = \{-0,32\}$	Potenz isolieren auf beiden Seiten logarithmieren Logarithmengesetz anwenden
$7^{x+1} = 7^{2x}$ $x+1 = 2x$ $1 = x$ $L = \{1\}$	Exponenten müssen gleich sein
$2^x = 3^{x-1}$ $x \lg 2 = (x-1) \lg 3$ $x \lg 2 = x \lg 3 - \lg 3$ $x (\lg 2 - \lg 3) = -\lg 3$ $x = -\frac{\lg 3}{\lg 2 - \lg 3}$ $x \doteq 2,71$ $L = \{2,71\}$	ausmultiplizieren... ... Terme mit dem Faktor x auf die linke Seite bringen und x ausklammern

2. Lösungen zu Graphen

2.1



Rechnung zu 2.2	Bemerkung
$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\frac{1}{2}$ $= \frac{1}{2}[x^2 - 6x + 11]$ $= \frac{1}{2}[(x-3)^2 - 9 + 11]$ $= \frac{1}{2}[(x-3)^2 + 2]$ $= \frac{1}{2}(x-3)^2 + 1$ <p>Scheitelpunkt ist S(3 1). Die Gleichung der verschobenen Parabel lautet:</p> $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$ $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$	<p>durch quadratische Ergänzung Funktionsterm auf Scheitelpunktform bringen</p> <p>Der Öffnungsfaktor 0,5 bleibt; neuer Scheitelpunkt ist S_{neu}(-2 -3).</p>

2.3 Man zeichnet jeweils die beiden Graphen in ein Koordinatensystem. Der Schnittpunkt bzw. die Schnittpunkte geben die Lösungen an.

a) $L = \{(2,4|8,8); (-0,4|3,2)\}$

b) $L = \{(1,3|6,7)\}$

3. Lösungen zur Geometrie

3a) $A_{\text{ges}} = A_{\text{Parallelogramm}} + A_{\text{Dreieck}}$
 $= 4 \cdot 3 + 0,5 \cdot 4 \cdot 3$
 $= 18$

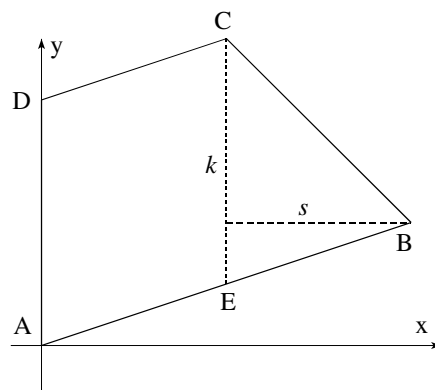
Der Flächeninhalt ist 18 FE groß.

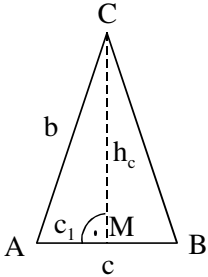
Das Volumen des Prismas beträgt $18 \cdot 7 \text{ VE} = 126 \text{ VE}$.

Weil die Höhen von Zylinder und Prisma gleich sind, muss gelten: $A_{\text{Kreis}} = A_{\text{ges}}$. Wegen $A_{\text{Kreis}} = \pi \cdot r^2$ ist

$$r = \sqrt{\frac{A_{\text{ges}}}{\pi}} \doteq 2,4$$

Der Radius des Zylinders beträgt ca. 2,4 LE.



Rechnung zu 3b	Bemerkung
<div style="text-align: center;">  </div> $b^2 = h_c^2 + c_1^2 \quad \text{mit } c_1 = \frac{c}{2} = 4$ $h_c^2 = b^2 - c_1^2$ $= 25 - 16$ $= 9$ $h_c = 3$ <p>Die gesuchte Höhe ist 3 cm lang.</p>	<p>Skizze mit</p> <ul style="list-style-type: none"> - gegebenen Größen - gesuchten Größen - Hilfsgrößen <p>Satz von Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck AMC anwenden (b ist die Hypotenuse, h_c und c_1 sind die Katheten.)</p>

Rechnung zu 3c	Bemerkung
$\frac{\overline{AB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{SD}}$ $\overline{AB} = \frac{\overline{CD}}{\overline{SD}} \cdot \overline{SA}$ $= \frac{1,7}{2,3} \cdot 2,8$ $\doteq 2,07$ <p>Die Strecke AB ist ca. 2,07 km lang.</p>	<p>1. Strahlensatz</p>
$\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$ $\overline{BC} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}} \cdot \overline{AD}$ $= \frac{2,3 + 1,7}{2,3} \cdot 1,5$ $\doteq 2,61$ <p>Die Strecke BC ist ca. 2,61 km lang.</p>	<p>2. Strahlensatz</p>
<p>Parallelität liegt vor, wenn z.B. die beiden Winkel $\sphericalangle SDA$ und $\sphericalangle ACB$ gleich sind.</p>	<p>Stufenwinkelsatz</p>

Rechnung zu 3d	Bemerkung
$\tan \alpha = \frac{h_c}{c_1}$ $\alpha = 36,9^\circ$ <p>oder</p> $\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$ $\alpha = 36,9^\circ$	<p>Definition von sin, cos und tan:</p> $\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\text{Cosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$