Der k-Faktor-Kalkül

Der *k*-Faktor-Kalkül ist eine anschauliche und übersichtliche Methode zur Behandlung der Speziellen Relativitätstheorie. Sie stammt von H. Bondi. Die Grundidee besteht darin, Position und Zeit von Ereignissen durch Lichtblitze zu ermitteln (Radarmethode). Dazu sendet man einen Lichtblitz aus, welcher das Ereignis trifft, d.h. zum Zeitpunkt t_E an der Stelle x_E ankommt. Hier wird der Lichtblitz reflektiert. Aus den Zeitpunkten des Absendens t_1 und des Empfangens t_2 kann man t_E und x_E berechnen.

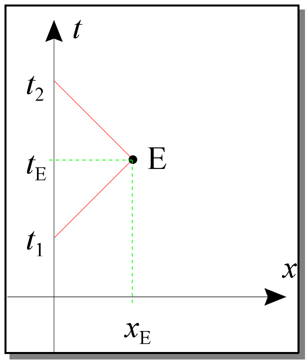

Abbildung 1

Nach dem 2. Einsteinschen Postulat über die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit braucht der Lichtblitz für den Hin- und Rückweg nämlich die gleiche Zeit. Wenn wir die Strecke jetzt in Lichtsekunden messen, gilt:

$$x_E = \frac{t_2 - t_1}{2} \quad \text{und} \quad t_E = t_1 + x_E = \frac{t_1 + t_2}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Wir betrachten nun zwei Inertialsysteme, die sich mit der Geschwin digkeit v von einander weg bewegen mögen. Das erste ordnen wir Einstein ① zu, das zweite Zweistein ②. Der Einfachheit betrachten wir die Situation von Einsteins System aus. Irgendwann treffen sich Einstein und Zweistein, sie stellen in diesem Augenblick ihre (identischen) Uhren jeweils auf 0 Uhr (Abb. 2).

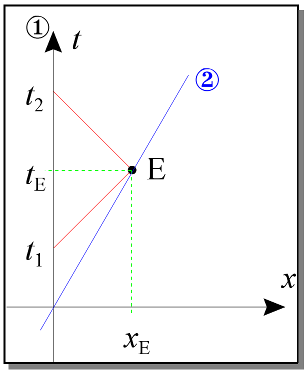

Abbildung 2

Einstein sendet in Zeitabständen T Lichtblitze aus, die von Zweistein in Zeitabständen T' gemessen werden. Die von Zweistein gemessene Zeit T' ist größer als T. Das Verhältnis von T' zu T hängt von der Geschwindigkeit v ab. Man bezeichnet es nach Bondi als den *k*-Faktor, genauer:

Definition des *k*-Faktors: Ein System emittiert Lichtblitze, welche von einem anderen System aus empfangen werden; dann legt man fest:

$$k = \frac{\textit{Empfangsintervall, gemessen mit der Uhr des Empfängers}}{\textit{Sendeintervall, gemessen mit der Uhr des Senders}}$$

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen dem k-Faktor und der Geschwindigkeit? Wir lassen Zweistein die von Einstein empfangenen Lichtblitze reflektieren ($t_1 = T$). Dann gilt nach (1):

$$v = \frac{x_E}{t_E} = \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1} \qquad \textbf{(2)}$$

Nach Definition des *k*-Faktors ist einerseits $T' = k \cdot t_1$. Andererseits kann man T' aber auch als

Sendeintervall für den reflektierten Lichtblitz auffassen; bei diesem ist t_2 das Empfangsintervall. Deswegen gilt auch $t_2 = k \cdot T'$ mit demselben Wert für den k-Faktor (Relativitätsprinzip). Deswegen ist $t_2 = k^2 \cdot t_1$. Setzen wir dies in (2) ein, so erhalten wir:

$$v = \frac{k^2 \cdot t_1 - t_1}{k^2 \cdot t_1 + t_1} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \tag{3}$$

Stellt man (3) nach k um, so kann man aus der Geschwindigkeit v den k-Faktor ausrechnen:

$$k = \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}} \tag{4}$$

Mithilfe der Radarmethode und den Beziehungen (3) und (4) kann man die meisten Formeln der Speziellen Relativitätstheorie recht einfach herleiten; man kann auch entscheidende Aussagen der Speziellen Relativitätstheorie fast unmittelbar ablesen, z.B. die Tatsache, dass bewegte Uhren langsamer gehen.

Die Geschwindigkeit von Zweistein gegenüber Einstein betrage 0,8, dh. 80% der Lichtgeschwindigkeit. Nach (4) ist der k-Faktor dann genau 3. Wenn also Einstein 2 min nach dem Treffen einen Lichtblitz aussendet (gemessen mit Einsteins Uhr), empfängt Zweistein diesen Blitz 6 min nach dem Treffen (gemessen nach Zweisteins Uhr). Für Einstein findet der Empfang des Lichtblitzes aber erst 10 min nach dem Treffen statt (Abb. 3). Einstein und Zweistein messen also zwischen ihrem Treffen und dem Empfang des Lichtblitzes unterschiedliche Zeiten: Zeit hängt also vom Bezugssystem ab, sie ist sozusagen eine Privatsache.

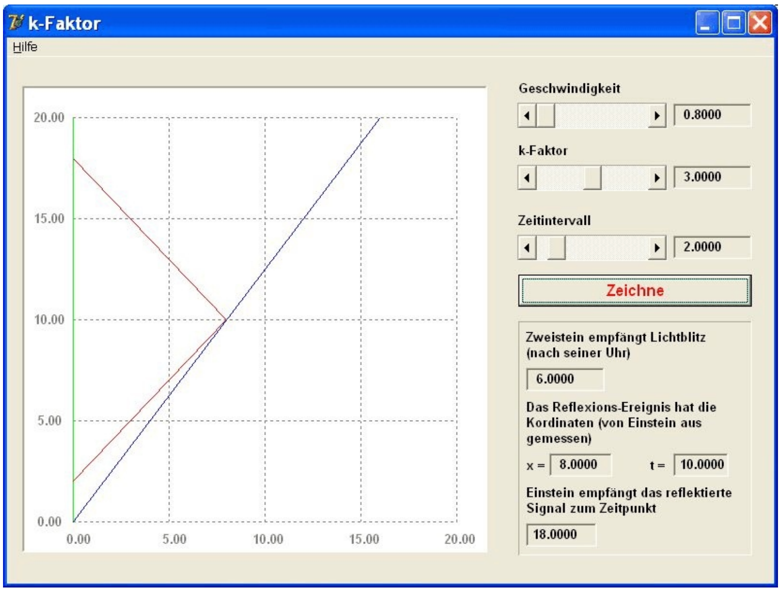

Abbildung 3: Darstellung der Radarmethode mit dem Programm kFaktor.