Lösungen zur Übungsaufgabe

Bei Unklarheiten und Fragen bitte unter bongartz_schule@web.de melden!

$f(t) = 8 \cdot t \cdot e^{-0,25t}$, $t \in [0;24]$

t in Stunden seit der Einnahme

$f(t)$ Wirkstoffkonzentration in mg/L

a) Bis 4 Stunden nach der Einnahme steigt die Wirkstoffkonzentration bis auf ca. 12 mg/L. Danach sinkt die Wirkstoffkonzentration wieder ab.

$$f(24) = 8 \cdot 24 \cdot e^{-0,25 \cdot 24}$$
$$= 192 \cdot e^{-6}$$
$$\approx 0,48$$

24 Stunden nach der Einnahme beträgt die Wirkstoffkonzentration noch 0,48 mg/L.

b) maximale Wirkstoffkonzentration

$\rightarrow$ gesucht ist der Hochpunkt

$$f'(t) = 8 \cdot e^{-0,25t} + 8t \cdot (-0,25) e^{-0,25t}$$ Produkt- & Kettenregel

$$= (8 + 8t \cdot (-0,25)) e^{-0,25t}$$
$$= (8 - 2t) e^{-0,25t}$$

$$f''(t) = -2 e^{-0,25t} + (8-2t) \cdot (-0,25) e^{-0,25t}$$
$$= (-2 + (8-2t) \cdot (-0,25)) e^{-0,25t}$$
$$= (-2 - 2 + \tfrac{1}{2}t) e^{-0,25t}$$
$$= (-4 + \tfrac{1}{2}t) e^{-0,25t}$$

notw. Bed.: $f'(t) = 0$

$$(8-2t)\cdot e^{-0{,}25t} = 0$$
$$8-2t = 0 \quad \vee \quad e^{-0{,}25t} = 0$$
$$8 = 2t \qquad \text{keine Lösung}$$
$$4 = t$$

Kandidat: 4

hinr. Bed.: $f'(t) = 0 \wedge f''(t) \neq 0$

$$f''(4) = (-4 + \tfrac{1}{2}\cdot 4)\cdot e^{-0{,}25\cdot 4}$$
$$= -2\cdot e^{-1}$$
$$= -\frac{2}{e} \approx -0{,}74 < 0$$

Da $f'(4) = 0$ und $f''(4) < 0$ liegt bei $t = 4$ ein Hochpunkt.

$$f(4) = 8\cdot 4\cdot e^{-0{,}25\cdot 4}$$
$$= 32\cdot e^{-1}$$
$$= \frac{32}{e} \approx 11{,}77$$

4 Stunden nach der Einnahme wird die maximale Wirkstoffkonzentration von 11,77 mg/L erreicht.

c)
$$f''(t) = (-4 + \tfrac{1}{2}t)\, e^{-0{,}25t}$$
$$f'''(t) = \tfrac{1}{2}\, e^{-0{,}25t} + (-4 + \tfrac{1}{2}t)\cdot(-0{,}25)\, e^{-0{,}25t}$$
$$= (\tfrac{1}{2} + (-4 + \tfrac{1}{2}t)(-0{,}25))\, e^{-0{,}25t}$$
$$= (\tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{1}{8}t)\, e^{-0{,}25t}$$
$$= (1\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}t)\, e^{-0{,}25t}$$

notw. Bed.: $f''(t) = 0$

$$(-4 + \tfrac{1}{2}t)\, e^{-0{,}25t} = 0$$

$$-4 + \tfrac{1}{2}t = 0 \quad \vee \quad e^{-0{,}25t} = 0$$

$$-4 = -\tfrac{1}{2}t \qquad \text{keine Lösung}$$

$$8 = t$$

Kandidat: 8

hinr. Bed.: $f''(t) = 0 \wedge f'''(t) \neq 0$

$$f'''(8) = (1\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} \cdot 8)\, e^{-0{,}25 \cdot 8}$$

$$= (1\tfrac{1}{2} - 1)\, e^{-2}$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{-2}$$

$$= \frac{1}{2e^2} \approx 0{,}07 \neq 0$$

Da $f''(8) = 0$ und $f'''(8) \neq 0$ liegt bei $t = 8$ ein Wendepunkt.

Der Wendepunkt bei $t = 8$ ist das Minimum der Änderungsrate $f'(t)$.

$f''(t)$ entspricht der ersten Ableitung der Änderungsrate $f'(t)$, da $f''(8) = 0$ ist, liegt bei $t = 8$ ein Min. / Max. der ersten Ableitung.

$f'''(t)$ entspricht der zweiten Ableitung der Änderungsrate $f'(t)$, da $f'''(8) > 0$ ist, liegt bei $t = 8$ das Min. der ersten Ableitung, d.h. der Punkt der stärksten Abnahme.

d)

Wenn $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist, dann muss gelten: $F'(t) = f(t)$

$$F(t) = -32\,(t+4) \cdot e^{-0{,}25t}$$

$$F'(t) = -32\,e^{-0{,}25t} + (-32(t+4) \cdot (-0{,}25))e^{-0{,}25t}$$

$$= (-32 + 8(t+4))\,e^{-0{,}25t}$$

$$= (-32 + 8t + 32)\,e^{-0{,}25t}$$

$$= 8t\,e^{-0{,}25t}$$

$$= f(t) \quad \checkmark$$

$$m = \frac{1}{12-0} \int_0^{12} 8t\,e^{-0{,}25t}\,dt$$

$$= \frac{1}{12}\left(-32(12+4)\,e^{-0{,}25 \cdot 12} - (-32(0+4)\,e^{-0{,}25 \cdot 0})\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(-512\,e^{-3} + 128\,e^{0}\right)$$

$$= -42\tfrac{2}{3}\,e^{-3} + \cancel{128}\ 10\tfrac{2}{3} \qquad e^{0} = 1$$

$$\approx 8{,}54$$

Innerhalb der ersten 12 Stunden nach der Einnahme beträgt die mittlere Wirkstoffkonzentration 8,54 mg/L.

e)

ges.: Tangente in $P(24 | f(24))$

$f(24) = 192 \cdot e^{-6}$

Steigung der Tangente entspricht der ersten Ableitung.

$$f'(24) = (8 - 2 \cdot 24)\, e^{-0{,}25 \cdot 24}$$
$$= -40\, e^{-6}$$
$$\approx -16137{,}15$$

$$192\, e^{-6} = -40\, e^{-6} \cdot 24 + b$$
$$192\, e^{-6} = -960\, e^{-6} + b$$
$$1152\, e^{-6} = b$$

$$y = -40\, e^{-6} \cdot t + 1152\, e^{-6}$$

$$y \approx -16137{,}15 \cdot t + 2{,}86$$

Vollständig abgebaut; d.h. $y = 0$

$$0 = -40\, e^{-6} \cdot t + 1152\, e^{-6}$$
$$-1152\, e^{-6} = -40\, e^{-6} \cdot t$$
$$28{,}8 = t$$

28,8 Stunden nach der Einnahme ist der Wirkstoff nach diesem Modell abgebaut.