Lösungen zum AB Selbst lernen

**294/1**

a) $\vec{n}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = 3+1-4 = 0$

$\Rightarrow g \parallel E$

$2+1-2\cdot 4 = 3$

$-5 = 3$ ↯ $\Rightarrow$ g nicht in E

b) $\vec{n}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\3\\-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 2-3-7 = -8$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt

$2\cdot(3+r)+3(2-r)-7(1) = 11$

$6+2r+6-r-7 = 11$

$5+r = 11$

$r = 6$

$S(9\,|\,-4\,|\,1)$

c) $\vec{n}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} = 3-4+1 = 0$

$\Rightarrow g \parallel E$

$0+2\cdot 1-1\cdot(-1) = 3$

$2+1 = 3$

$3 = 3$ ✓ $\Rightarrow$ g liegt in E

d) $\vec{n}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = 2-1+1 = 2$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt

$(1+2r)+(-2-r)-(1-r) = 1$

$1+2r-2-r-1+r = 1$

$2r-2 = 1$

$2r = 3$

$r = 3/2$

$S(4\,|\,-3\tfrac{1}{2}\,|\,-0{,}5)$

**294/2**

a) $\vec{n}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = 1-4+9 = 6$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt

$(1+r)-2(2+2r)-3(3-3r) = 6$

$1+r-4-4r-9+9r = 6$

$6r-12 = 6$

$6r = 18$

$r = 3$

$S(4\,|\,8\,|\,-6)$

b) $\vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 - 4 - 6 = -8$

=> Schnittpunkt

$2(r) - 2(3+2r) - 2(2+3r) = 3$

$2r - 6 - 4r - 4 - 6r = 3$

$-8r - 10 = 3$

$-8r = 13$

$r = -13/8$

$S(-13/8 \mid -1/4 \mid -23/8)$

c) $\vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 3 - 3 = -1$

=> Schnittpunkt

$(2-r) + (-1+3r) - 3(1+r) = 1$

$2 - r - 1 + 3r - 3 - 3r = 1$

$-2 - r = 1$

$-r = 3$

$r = 3$

$S(-1 \mid 8 \mid 4)$

d) $\vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 + 1 + 2 = 2$

=> Schnittpunkt

$-(3+r) + (-2+r) - (-1-2r) = -2$

$-3 - r - 2 + r + 1 + 2r = -2$

$2r - 4 = -2$

$2r = 2$

$r = 1$

$S(4 \mid -1 \mid -3)$

294/3

$x_2x_3$- Ebene: $x_1 = 0$   $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$S(s_1 \mid s_2 \mid s_3)$

$s_1 = -1 + r$   $s_2 = 1 + 1{,}5r$   $s_3 = 2 + 3r$

S liegt in der $x_2x_3$-Ebene, d.h. $s_1 = 0$

$-1 + r = 0$ ; d.h. $r = 1$

$s_2 = 1 + 1{,}5 \cdot 1 = 2{,}5$

$s_3 = 2 + 3 \cdot 1 = 5$

$S(0 \mid 2{,}5 \mid 5)$

## 294/4

$E: 2x_1 - x_2 + 14x_3 = 48 \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$x_1 = 8 - 4r \qquad x_2 = 2r \qquad x_3 = 2 + 5r$

$2 \cdot (8-4r) - (2r) + 14(2+5r) = 48$

$16 - 8r - 2r + 28 + 70r = 48$

$60r = 4$

$r = 1/15$

$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1/15 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\ 11/15 \\ 2/15 \\ 7/3 \end{pmatrix}$

## 294/5

(1) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad E: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1+4+9 = 14 \neq 0$

=> Schnittpunkt

$\vec{n} = \vec{u} \Rightarrow g \perp E$

$x_1 = 2 + r \qquad x_2 = 9 + 2r \qquad x_3 = -4 + 3r$

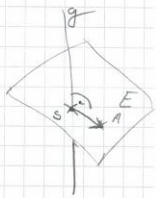
$2 + r + 2(9+2r) + 3(-4+3r) = 8$

$2 + r + 18 + 4r - 12 + 9r = 8$

$14r = 0$

$r = 0$

$S(2 \mid 9 \mid -4)$




Wähle ein A aus E

z.B.: $A(1 \mid 2 \mid 1)$

$g_1: \vec{x} = S + r \cdot \overrightarrow{SA}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-9 \\ 1-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E: 2x_2 - 3x_3 = 4$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 + 6 - 6 = 0$

$\Rightarrow g \parallel E$

$P(3 \mid 5 \mid 2) \in E$ ?

$2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 4$

$10 - 6 = 4$

$4 = 4$ ✓ g liegt in E

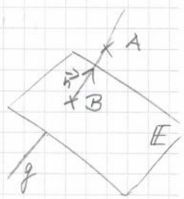
## 294/6

$E: -2x_1 + 5x_2 - x_3 = 10 \qquad A(1 \mid -2 \mid 4)$

a) durch A und E schneidet ; B Punkt in E

Wähle als Richtungsvektor $\vec{u}$ den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

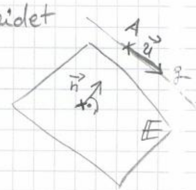



b) durch A verläuft und E nicht schneidet

g muss parallel zu E sein

$\vec{u}$ ist dann senkrecht zu $\vec{n}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$



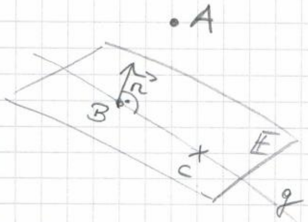

$-2u_1 + 5u_2 - u_3 = 0$

Wähle $u_1 = 1$ ; $u_2 = 1$

$$-2+5-u_3=0$$
$$u_3 = 3$$
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$$

c) in $E$

Wähle 2 Punkte in der Ebene $E$




z.B.: $B(-1\,|\,1\,|\,-3)$

$C(3\,|\,4\,|\,4)$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix}$$

## 295/7

$P(4\,|\,-5\,|\,8)$ $\qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\1\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$

$E$ geht durch $P$ und ist orthogonal zu $g$, d.h. Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden ist der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene

$E: \; 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = k$

$P$ in $E$, d.h. $3\cdot 4 - 2\cdot(-5) + 4\cdot 8 = k$

$54 = k$

$E: \; 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 54$

Schnittpunkt F von g und E

$$3(6+3s) - 2(1-2s) + 4(6+4s) = 54$$
$$18 + 9s - 2 + 4s + 24 + 16s = 54$$
$$29s = 14$$
$$s = 14/29$$

$S\,(7{,}45\,|\,0{,}03\,|\,7{,}93)$

$\left(7\tfrac{13}{29}\,\middle|\,\tfrac{1}{29}\,\middle|\,7\tfrac{27}{29}\right)$

$$d = |\overrightarrow{PF}| = \left|\begin{pmatrix}3\tfrac{13}{29}\\5\ 1/29\\-2/29\end{pmatrix}\right|$$
$$= \frac{6}{29}\sqrt{870}$$
$$\approx 6{,}1$$

## 295/8

$g_a$ soll $E$ nicht schneiden, d.h. $g_a \parallel E$

d.h. $\vec{u} \perp \vec{n}$, d.h. $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$

$\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\-3\\a\end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0\cdot 1 + (-3)\cdot 1 + a\cdot(-3) = 0$$
$$-3 - 3a = 0$$
$$-3a = 3$$
$$a = -1$$

295/10

a) $\vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0$

$\Rightarrow g \parallel E_1$

$1 + 2 \cdot 1 - (-1) = 4$

$4 = 4$ ✓ $\Rightarrow g \in E_1$

$E_2 : 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 = b$

$E_2 \perp E_1$, d.h. $\vec{u}$ ist $\vec{n}$ von $E_2$

$1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = b$

$1 = b$

$E_2 : x_1 - x_2 - x_3 = 1$

b) $\vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0$

$\Rightarrow g \parallel E_1$

$3 - 2 = 1$

$1 = 1$ ✓ $\Rightarrow g \in E_1$

$E_2$ hat $\vec{u}$ als $\vec{n}$

$E_2 : 2x_1 + 2x_2 + x_3 = b$

$2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 = b$

$12 = b$

$E_2 : 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$

c) $\vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 1 - 3 = 0$

$\Rightarrow g \parallel E_1$

$4 + 1 - 3 \cdot 1 = 2$

$2 = 2$ ✓ $\Rightarrow g \in E_1$

$E_2$ hat $\vec{u}$ als $\vec{n}$

$E_2 : 2x_1 + x_2 + x_3 = b$

$2 \cdot 4 + 1 + 1 = b$

$10 = b$

$E_2 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 10$

295/12)

a)

$E_1: \; x_1 + x_2 - x_3 = 1 \qquad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_2: \; 4x_1 - x_2 - x_3 = 3 \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ keine Vielfache

$\Rightarrow$ Schnittgerade

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{array} \right| \; +$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 \quad - 2x_3 = 4 \end{array} \right|$$

Wähle $x_3 = t$

$5x_1 - 2t = 1$

$5x_1 = 1 - 2t$

$x_1 = 0{,}2 - 0{,}4t$

$0{,}2 - 0{,}4t + x_2 - t = 1$

$x_2 = 0{,}8 + 1{,}4t$

$g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 1{,}4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)

$E_1: \; -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \qquad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$E_2: \; -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ keine Vielfache

$\Rightarrow$ Schnittgerade

$$\left| \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \end{array} \; +$$

$$\left| \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ \quad -5x_2 + 2x_3 = 12 \end{array} \right|$$

Wähle: $x_3 = t$

$-5x_2 + 2t = 12$

$-5x_2 = 12 - 2t$

$x_2 = -2{,}4 - 0{,}4t$

$-2x_1 + 3(-2{,}4 - 0{,}4t) - 4t = 12$

$-2x_1 - 7{,}2 - 1{,}2t - 4t = 12$

$-2x_1 = 19{,}2 + 5{,}2t$

$x_1 = -9{,}6 - 2{,}6t$

$g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} -9{,}6 \\ -2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2{,}6 \\ -0{,}4 \\ 1 \end{pmatrix}$

295/13 (

a)

$E_1: \; 6x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 15 \qquad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

$E_2: \; -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -5 \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$E_3: \; 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5 \qquad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$E_1$ und $E_2$ identisch ; „$E_1 = -3 \cdot E_2$"

$\vec{n}_2 / \vec{n}_1$ und $\vec{n}_3$ keine Vielfache

$\Rightarrow$ Schnittgerade

$$\left| \begin{array}{l} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \\ \end{array} \; +$$

$$\left|\begin{array}{l} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -5 \\ \qquad\qquad 12x_3 = -5 \end{array}\right|$$

$$x_3 = -5/12$$

$$-2x_1 - x_2 + 3\cdot(-5/12) = -5$$

$$-2x_1 - x_2 = -\frac{15}{4}$$

Wähle $x_1 = t$

$$x_2 = \frac{15}{4} - 2t$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15/4 \\ -5/12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $E_1: 2x_1 + x_2 = 5 \qquad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_2: 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_3: 4x_1 + 2x_2 = 3 \qquad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2\cdot\vec{n}_1 = \vec{n}_3$ ; $E_1 \parallel E_3$, da $2\cdot E_1 \neq E_3$

$\vec{n}_2$ ist kein Vielfaches von $\vec{n}_1$ oder $\vec{n}_3$

$\Rightarrow$ Schnittgerade

$E_1 \cap E_2: \left|\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{array}\right|$

Setze $x_1 = t$

$x_2 = 5 - 2t$

$x_3 = 10 - 4t - 2(5 - 2t) = 0$

$$g_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E_2 \cap E_3 \left|\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 = 3 \end{array}\right|$

Wähle: $x_2 = t$

$x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t$

$x_3 = 10 - 4\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t\right) \cancel{+} -2t = 7$

$$g_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$E_1: x_1 = 1 \qquad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_2: x_1 = -1 \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_3: x_1 = 0 \qquad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_1 \parallel E_2 \parallel E_3$, da $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{n}_3$

Ebenen sind nicht identisch, da $1 \neq -1 \neq 0$

Für die Richtigkeit der Lösungen übernehme ich keine Gewähr!

Bei Problemen/gefundenen Fehlern bitte melden.

Zu Aufgabe 11 habe ich leider noch keine Lösung. Ein Lösungsbuch gibt es nämlich noch nicht. Ich hoffe ich schaffe es noch heute Abend eine Lösung zu erstellen und sie euch dann hochzuladen.
Wichtiger für die Klausur sind Aufgaben vom Typ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13